

به نام خدا
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد اصفهان (خوراسگان)

درس: تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)

رشته: حسابداری

تحقیق در عملیات

جلسه دوم

فصل اول

برنامه ریزی خطی

3

روش ترسیمی حل مسائل برنامه ریزی خطی

این روش برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با دو متغیر استفاده و طی دو گام زیر انجام می شود:

گام اول: ناحیه شدنی به کمک رسم محدودیت ها و اشتراک فضاهای به دست آمده از آن مشخص می شود.

گام دوم: در این گام به دنبال نقطه ای از ناحیه شدنی می گردیم که تابع هدف Z را به بهترین مقدار خود برساند. بدین منظور، بردار ضرایب تابع هدف (C) و خط عمود بر آن را رسم می کنیم. در مسائل ماکزیمم سازی، خط عمود بر تابع هدف را در جهت بردار C حرکت داده تا از ناحیه شدنی خارج شود. نقطه ای که آخرین تماس این خط با ناحیه شدنی است، جواب بهینه مسئله خواهد بود. این حرکت برای مسائل مینیمم سازی در خلاف جهت بردار C انجام می شود.

4

تحقیق در عملیات

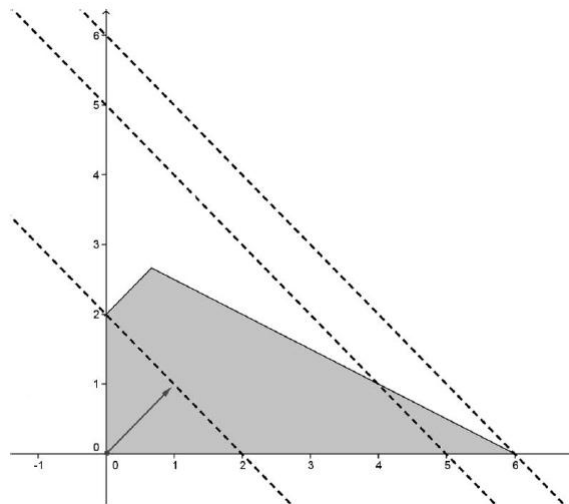
مثال ۱-۶. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

ناحیه شدنی مدل فوق در شکل زیر نشان داده شده است. خطوط نقطه چین نیز معادله خطی $z = x_1 + x_2$ بوده که برای برخی مقادیر z رسم شده اند (منحنی های هدف).

5

تحقیق در عملیات



6

تحقیق در عملیات

با توجه به روش ذکر شده، منحنی های هدف به موازات خود و در جهت بردار ضرایب تابع هدف حرکت کرده تا از ناحیه شدنی خارج شوند. آخرین نقطه از ناحیه شدنی که منحنی هدف با عبور از آن از ناحیه خارج می شود، نقطه $X^* = (6, 0)$ بوده که جواب بهینه مسئله است. مقدار بهینه تابع هدف نیز برابر است با $Z^* = x_1^* + x_2^* = 6$.

7

تحقیق در عملیات

حالت های مختلف یک مسئله برنامه ریزی خطی

منظور از حل یک مسئله برنامه ریزی خطی، مشخص کردن وضعیت مسئله با توجه به نوع ناحیه ی شدنی و بردار تابع هدف آن است. حالات کلی زیر می تواند برای یک مسئله برنامه ریزی خطی رخ دهد:

الف) مسئله دارای جواب بهینه است. اگر مسئله برنامه ریزی خطی دارای جواب بهینه بوده و مقدار بهینه تابع هدف متناهی باشد، گوییم مسئله دارای جواب بهینه متناهی و یا به اختصار دارای جواب بهینه است. اگر ناحیه شدنی، متناهی و کراندار باشد آنگاه مسئله حتما دارای جواب بهینه متناهی خواهد بود.

8

تحقیق در عملیات

ب) مسئله دارای جواب بهینه چندگانه (دگرین) است. این حالت زمانی رخ می دهد که مسئله دارای جواب بهینه بوده، اما تعداد جواب های بهینه بیش از یکی باشد. در یک مسئله برنامه ریزی خطی در صورتی که دو نقطه متفاوت، جواب بهینه باشند، همه نقاط روی پاره خط واصل آن دو نیز جواب های بهینه آن مسئله خواهند بود. همچنین، در صورتی که تابع هدف با یکی از محدودیت های مسئله موازی باشد، احتمالاً جواب بهینه چندگانه وجود دارد. مثال ۱-۷ این مطلب را بیان می کند.

9

تحقیق در عملیات

ج) مسئله دارای جواب بهینه نامتناهی (بی کران) است. در این حالت، مقدار بهینه تابع هدف، نامتناهی بوده و الزاماً ناحیه شدنی مسئله نیز بی کران (نامحدود) خواهد بود. از نظر هندسی، منحنی های هدف با حرکت در جهت مناسب، هیچ گاه از ناحیه شدنی خارج نمی شود. این حالت با مثال ۱-۸ تشریح می شود.

10

تحقیق در عملیات

د) در این حالت، محدودیت های مسئله با هم اشتراکی نداشته و ناحیه شدنی تهی است. بدیهی است که در چنین حالتی جواب بهینه وجود ندارد. این اتفاق در مثال ۹-۱ رخ می دهد.

11

تحقیق در عملیات

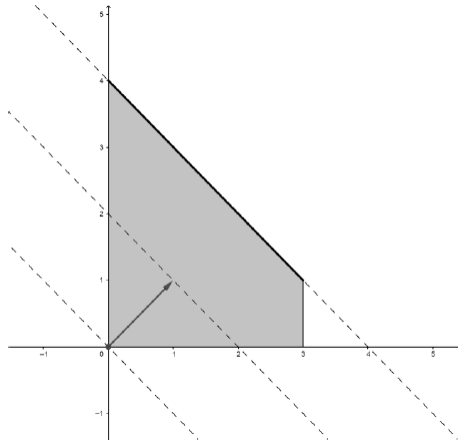
مثال ۷-۱. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ & x_1 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

12

تحقیق در عملیات

در این مثال، با حرکت دادن منحنی عمود بر بردار ضرایب تابع هدف $C = (1, 1)$ و در جهت آن، آخرین نقاطی از ناحیه شدنی که این منحنی زمان خارج شدن از ناحیه با آن ها تماس دارد، پاره خط مورب و تیره رنگ است. این مطلب وجود جواب های بهینه ی چندگانه را نشان می دهد.



13

تحقیق در عملیات

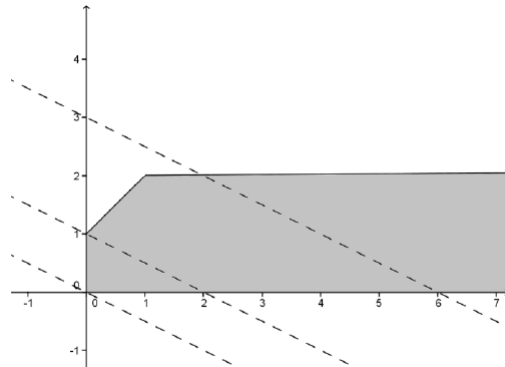
مثال ۸-۱. همان گونه که در شکل مشاهده می شود، ناحیه شدنی مدل برنامه ریزی خطی زیر بی کران (نامحدود) است.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

14

تحقیق در عملیات

در صورتی که منحنی های هدف در جهت بردار C حرکت کنند، هیچ گاه از ناحیه شدنی خارج نمی شوند و مقدار تابع هدف بصورت پیوسته افزایش می یابد. این اتفاق به این معنی است که تابع هدف مسئله می تواند در ناحیه شدنی، به سمت بینهایت میل نماید.



15

تحقیق در عملیات

مثال ۹-۱. ناحیه شدنی مدل برنامه ریزی خطی زیر تهی است. زیرا نواحی مجاز در هر یک از محدودیت های مسئله، با یکدیگر اشتراکی ندارند. این مطلب در شکل نشان داده شده است.

$$\max \quad z = 3x_1 + 2x_2$$

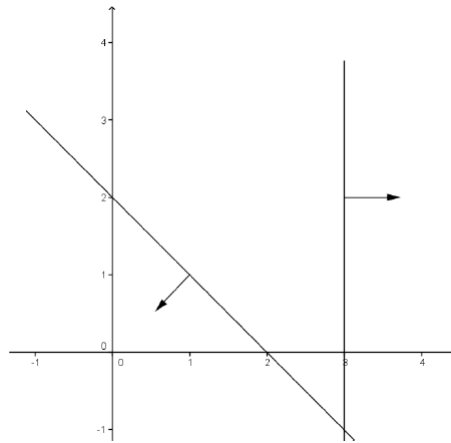
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 2,$$

$$x_1 \geq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

16

تحقیق در عملیات



17

تحقیق در عملیات

انواع محدودیت ها در یک مسئله برنامه ریزی خطی

محدودیت های مؤثر: محدودیت هایی هستند که در تشکیل ناحیه شدنی نقش دارند و حذف آن ها موجب بزرگتر شدن ناحیه شدنی می شود.

محدودیت های زائد: محدودیت هایی هستند که در تشکیل ناحیه شدنی نقشی نداشته و با حذف آن ها ناحیه شدنی تغییری نمی کند.

محدودیت های الزام آور (فعال): محدودیت های مؤثری هستند که جواب بهینه مسئله روی محدودیت حدی نظیر آن ها قرار دارد.

18

تحقیق در عملیات

مثال ۱-۱۰. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\max z = x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 \leq 2,$$

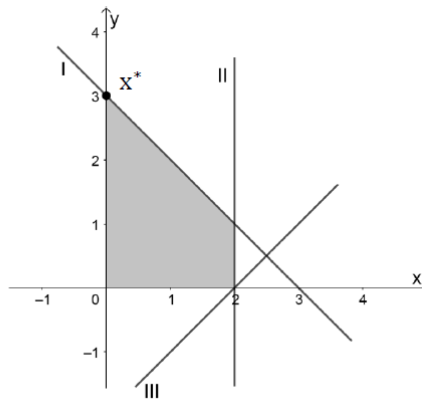
$$x_1 - x_2 \leq 2,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

19

تحقیق در عملیات

ناحیه شدنی مدل فوق در شکل زیر نشان داده شده است.



20

تحقیق در عملیات

جواب بهینه این مسئله نقطه $X^* = (0, 3)$ بوده و مقدار بهینه تابع هدف نیز برابر است با $Z^* = 6$.
وضعیت محدودیت های مسئله نیز به شرح زیر است:

محدودیت های I و II مؤثر هستند، زیرا در ساختن ناحیه شدنی نقش داشته و با حذف آن ها ناحیه تغییر می کند. محدودیت III یک محدودیت زائد است و با حذف آن، ناحیه شدنی تغییری نمی کند. همچنین، محدودیت A یک محدودیت الزام آور است، زیرا جواب بهینه روی آن قرار دارد.

21

تحقیق در عملیات

بررسی تغییرات در یک مسئله برنامه ریزی خطی

فرض کنید یک مسئله برنامه ریزی خطی دارای جواب بهینه باشد. اگر ناحیه شدنی آن مسئله تغییر کند، احتمالاً بهینگی آن تحت تأثیر واقع شود. در این قسمت، چند مورد از این تغییرات بررسی می شوند.

22

تحقیق در عملیات

اگر یکی از محدودیت های مسئله حذف شود، ناحیه شدنی یا تغییری نمی کند (در صورت زائد بودن آن محدودیت) و یا بزرگتر می شود (در صورت مؤثر بودن). در هر دو حالت، مقدار بهینه تابع هدف مسئله بدتر نمی شود. به عبارت دیگر یا مقدار بهینه تابع هدف تغییری نمی کند و یا ممکن است به خاطر اضافه شدن نقاط جدید به ناحیه شدنی، بهینگی جواب بهینه قبلی نقض شده و نقطه ای با مقدار تابع هدف بهتر از آن یافت شود.

23

تحقیق در عملیات

برعکس، اگر یک محدودیت جدید به مسئله اضافه شود، ناحیه شدنی یا تغییری نمی کند و یا کوچکتر می شود. در هر دو حالت، مقدار بهینه تابع هدف مسئله بهتر نمی شود. یعنی یا مقدار بهینه تابع هدف تغییری نمی کند و یا ممکن است جواب بهینه قبلی به دلیل صدق نکردن در محدودیت جدید، از ناحیه شدنی حذف شود و در نتیجه، یک جواب بهینه جدید با مقدار تابع هدف بدتر از قبلی به دست آید.

24

تحقیق در عملیات

اگر یکی از متغیرهای مسئله حذف شود، بعد مسئله کاهش یافته و ناحیه شدنی یا تغییری نمی کند و یا کوچکتر می شود. در این حالت، مقدار بهینه تابع هدف بهتر نمی شود. به عبارت دیگر یا مقدار بهینه تابع هدف بدون تغییر باقی مانده و یا بدتر می شود.

اگر یک متغیر به مسئله اضافه شود، بعد مسئله افزایش یافته و ناحیه شدنی یا تغییری نمی کند و یا بزرگتر می شود. در این حالت، مقدار بهینه تابع هدف بدتر نمی شود.

25

تحقیق در عملیات

فرم های کلی یک مسئله برنامه ریزی خطی

یک مسئله برنامه ریزی خطی می تواند به دو فرم استاندارد و کانونی بیان شود. در فرم استاندارد، تابع هدف از نوع ماکزیمم یا مینیمم بوده و محدودیت ها به فرم تساوی هستند:

$$\begin{array}{ll} \max/\min & z = cx \\ \text{s.t.} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

در فرم کانونی (متعارفی)، محدودیت ها به فرم نامساوی بوده و جهت آن ها با توجه به نوع تابع هدف مشخص می شود:

$$\begin{array}{ll} \max & z = cx \\ \text{s.t.} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

ماکزیمم سازی با محدودیت های کوچکتری

$$\begin{array}{ll} \min & z = cx \\ \text{s.t.} & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

مینیمم سازی با محدودیت های بزرگتری

26

تحقیق در عملیات

تبدیل فرم های مختلف یک مسئله برنامه ریزی خطی به یکدیگر

یک مسئله برنامه ریزی خطی می تواند به دو فرم استاندارد و کانونی بیان شده و این دو فرم نیز می توانند به راحتی به یکدیگر تبدیل شوند. موارد زیر نحوه تبدیل اجزای این دو فرم را نشان می دهند:

الف: تبدیل تابع هدف ماکزیمم سازی به مینیمم سازی و برعکس: این کار با ضرب علامت منفی در تابع هدف، انجام می شود.

$$\max z = -\min (-z)$$

$$\min z = -\max (-z)$$

27

تحقیق در عملیات

ب: تغییر جهت محدودیت های نامساوی: این کار با ضرب یک علامت منفی در طرفین محدودیت، انجام می شود.

$$Ax \leq b \quad \rightarrow \quad -Ax \geq -b$$

$$Ax \geq b \quad \rightarrow \quad -Ax \leq -b$$

28

تحقیق در عملیات

ج: تبدیل محدودیت های نامساوی به تساوی: با اضافه کردن یک مقدار نامنفی به محدودیت های کوچکتری و کم کردن یک مقدار نامنفی از محدودیت های بزرگتری، می توان آنها را به تساوی تبدیل نمود. این متغیرها را متغیرهای کمکی می نامند.

$$Ax \leq b \quad \rightarrow \quad Ax + s = b, \quad s \geq 0$$

$$Ax \geq b \quad \rightarrow \quad Ax - s = b, \quad s \geq 0$$

اگر مقدار یک متغیر کمکی برابر صفر باشد، آنگاه محدودیت نظیر آن به صورت تساوی برقرار بوده (یعنی $Ax = b$) و در صورت مثبت بودن متغیر کمکی، محدودیت به صورت نامساوی اکید خواهد بود.

29

تحقیق در عملیات

د: تبدیل محدودیت های تساوی به نامساوی: به جای یک محدودیت تساوی می توان همزمان یک محدودیت کوچکتری و یک محدودیت بزرگتری نوشت.

$$Ax = b \quad \rightarrow \quad \begin{cases} Ax \leq b \\ Ax \geq b \end{cases}$$

30

تحقیق در عملیات

ه : تبدیل متغیر آزاد (نامقید) به متغیر مقید: یک متغیر آزاد در علامت مانند x_j را می توان به صورت تفاضل دو متغیر مقید و نامنفی نوشت.

$$x_j \rightarrow x_j = x'_j - x''_j, \quad x'_j, x''_j \geq 0.$$

اگر در یک مسئله x_j مقدار مثبت داشته باشد، آنگاه x'_j مثبت و x''_j برابر صفر خواهد بود و اگر x_j مقدار منفی داشته باشد، آنگاه x'_j برابر صفر و x''_j مثبت بوده تا حاصل تفاضل آن دو منفی شود.

31

تحقیق در عملیات

مثال ۱-۱۱. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 4x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 6, \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 \geq 0, \quad x_2 \text{ نامقید}. \end{aligned}$$

32

تحقیق در عملیات

برای تبدیل این مسئله به فرم استاندارد، محدودیت ها باید از نوع تساوی و متغیرها نامنفی باشند، بنابراین، تغییرات زیر در مسئله انجام می شود:

$$x_1 + x_2 \geq 6 \quad \rightarrow \quad x_1 + x_2 - s_1 = 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4 \quad \rightarrow \quad -x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$

$$x_2 \quad \rightarrow \quad x'_2 - x''_2$$

33

تحقیق در عملیات

بنابراین فرم استاندارد مسئله به صورت زیر است:

$$\max \quad z = 4x_1 - 3(x'_2 - x''_2)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + (x'_2 - x''_2) - s_1 = 6,$$

$$-x_1 + 2(x'_2 - x''_2) + s_2 = 4,$$

$$x_1, x'_2, x''_2, s_1, s_2 \geq 0.$$

$$\max \quad z = 4x_1 - 3x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \geq 6,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, \text{ نامنفی } x_2.$$

34

قسمت دوم

تمرین ۱-۷. برای مسائل برنامه ریزی خطی ۱ الی ۶:

الف: مسئله را به روش ترسیمی حل کرده و حالتی که برای آن رخ می دهد را مشخص نمایید.

ب: نوع هر یک از محدودیت های مسئله را در کنار آن بنویسید.

$$\begin{array}{ll} \max & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \quad (\text{مسئله ۱})$$

$$\begin{array}{ll} \min & z = -x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \quad (\text{مسئله ۲})$$

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ & -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \quad (\text{مسئله ۳})$$

$$\begin{array}{ll} \max & z = x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} & -x_1 + x_2 \leq 2, \\ & 2x_1 - 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 + x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \quad (\text{مسئله ۴})$$

$$\begin{array}{ll} \min & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & -3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \quad (\text{مسئله ۵})$$

$$\begin{array}{ll}\max & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} & 2x_1 + 5x_2 \leq 10, \\ & -x_1 + x_2 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array} \quad (\text{مسئله ۶})$$

تمرین ۱-۸. مسائل برنامه ریزی خطی زیر را به فرم استاندارد بنویسید.

$$\begin{array}{ll}\max & z = -x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} & 3x_1 + 4x_2 \leq 12, \\ & -x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array} \quad (\text{مسئله ۱})$$

$$\begin{array}{ll}\min & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & -3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \text{ آزاد}.\end{array} \quad (\text{مسئله ۲})$$